はじめに (乱流とNavier-Stokes方程式)

巽, 友正

数理解析研究所講究録
354巻 1979年 1-5

はじめに

京大理　　巽 友正

この度，"乱流とNavier−Stokes方程式"を主題とする研究集会を開催する運びとなりましたが，多数の御参加を頂き，多くの興味ある研究発表をお寄せ下さいましたことは，世話人として誠に喜びにたえません。

一般に"乱流"と申しますとき，特に断りがなければ，圧縮性のない粘性流体における3次元的な乱流を指すのが普通であるように思われます。このような乱流におきましては，粘性率 ν（ここでは，Reynolds数 $R = UL/\nu$ の逆数の意味にとっておく）の値が小さいとき，エネルギー消散率，

$$\epsilon = -d\left(\frac{1}{2}\langle |u|^2 \rangle\right)/dt$$

（u：乱流の速度。t：時間）は ν によらない有限値をとる，

$$\nu \to 0 \text{ のとき，} \quad \epsilon > 0, \qquad (1)$$

ことが知られています。関係式(1)を前提としますと，ϵ と ν を独立パラメターとするKolmogorovの相似法則が成立し，それから $\nu \to 0$ の極限として，慣性小領域スペクトル，

$$E(k) \propto k^{-5/3} \tag{2}$$

が導かれます。

Kolmogorovの相似則および慣性小領域スペクトル(2)は，それらが乱流の大規模な構造とは無関係に成立するという意味で，普遍的(universal)なものと見なされています。また，Kolmogorov理論以後に発展した解析的な諸理論も，その多くはKolmogorovスペクトル(2)を一つの規準とし，あるいはそれを導くことを目標として進んできたといって過言ではありません。従って，(1)および(2)の結果は，乱流にとって少くともこれだけは確かなものとして，常識化されてきたといえます(付記を参照)。

これに対して，近年，研究の対象が非圧縮粘性流体の3次元運動以外に拡張されるようになったとき，上記の常識とは定性的に異った乱流の性質が色々と現れてきました。

例えば，Burgers方程式に従うBurgers乱流の場合，これは，1次元の圧縮性流体における弱い衝撃波の集まりとしての乱流を表しています。この乱流においては，(1)

は成立しますが、非粘性の極限でのスペクトルは(2)にはならず、

$$E(k) \propto k^{-2} \qquad (3)$$

の形をとります。このことから、Kolmogorovスペクトル(2)は、前提(1)からの必然的な帰結ではなく、一つの可能な結果にすぎないことが結論されます。

第2の例として、非圧縮粘性流体においても運動を2次元に限定した2次元乱流を考えますと、そこでは関係式(1)が成立せず、

$$\nu \to 0 \text{ のとき、} \quad \varepsilon \to 0 \qquad (4)$$

となります。従って、スペクトル(2)は勿論成立しないわけです。しかし、ここでエネルギー消散率 ε の代りに、エンストロフィー(平均2乗渦度)の消散率、

$$\eta = -d\left(\frac{1}{2}\langle |\mathrm{rot}\,u|^2 \rangle\right)/dt$$

を考え、非粘性の極限で η は ν によらない有限値に近づく、

$$\nu \to 0 \text{ のとき、} \quad \eta > 0 \qquad (5)$$

と仮定しますと、η と ν を独立パラメターとする2次元乱流の相似則が導かれ、さらに $\nu \to 0$ の極限形として、

$$E(k) \propto k^{-3} \qquad (6)$$

が得られます。

このように見てきますと，乱流にとっての常識であるかのように思われてきました(1)および(2)の性質は，実は，非圧縮性流体における3次元乱流に特有の性質であったということになります。そうとしますと，各種の乱流の特性というものは，それぞれの乱流を支配する基礎方程式の解析的性質と深く結びついているものと考えなければなりません。そして，そのような解析的性質は，非粘性の極限における解の特異性の形に端的に現れています。

例えば，3次元乱流はNavier-Stokes方程式に支配されますが，そこでは特異性は渦糸または渦板の形をとります。これらの渦糸や渦板は非線形相互作用によって変形をうけますが，それによって渦度が常に増大し，非粘性エネルギー消散(1)が発生します。一方，2次元乱流では，2次元性の制約のために渦度の増大が起らず，従って(1)の代りに(4)が成り立つことになります。また，2次元乱流において(5)が成り立つかどうかについて，理論家の意見は必ずしも一致してはいませんが，それは，2次元乱流の特異性としてどのような形のものを考えるかによるものです。Burgers乱流においては，方程式の特異性は衝撃波(準不連続面)の形をとります。衝撃波は渦糸や渦板と同様，非粘

性エネルギー消散(1)を作り出しますが，衝撃波面は渦糸や渦板に比べてはるかに安定であるために統計的な混合が起こらず，その結果，Kolmogorovスペクトル(2)が満たされないものと考えられます。

上に述べましたような乱流の統計的性質と，それを支配する方程式の特異性との関係は，あくまでも言葉による直観的な説明に過ぎず，理論としては，これを数学的な形にまで高めることが必要であります。 そのような仕事は，既にある程度は行われておりますが，大部分はなお今後の課題として残されているように思われます。 以上，この研究集会の主題に関連していささか思うところを述べましたが，これから3日間の研究会が乱流理論の今後の発展にとって真に実りあるものであることを期待して，開会の言葉と致します。

付記。 非圧縮性流体の3次元乱流においても，Kolmogorovの相似則と$k^{-5/3}$スペクトルは絶対的な普遍性をもつものではなく，"intermittency"を考慮した補正が必要であるとする考え方がある。 この考えは，最初Landauによって示唆され，Kolmogorov自身もこの効果をとりいれた理論の修正を試みた。 この補正の必要性に関しては種々の議論があるが，ここでの本筋には無関係なので割愛する。